ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

6ο φυλλάδιο ασκήσεων

1) Αν $a, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $a < \beta + \varepsilon$ για κάθε $\varepsilon > 0$ δείξτε ότι $a \leq \beta$.

2) Αν A ένα φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$, να εξετάσετε πότε ισχύει $\inf A = \sup A$.

3) Αν A, B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $a < \beta$ για κάθε $a \in A$ και κάθε $\beta \in B$, να δείξετε ότι $\sup A \leq \inf B$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\sup A < \inf B$;

4) Δίνεται το σύνολο $A = \{\frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}\}$. Δείξτε ότι $\inf A = 0$. [Υπόδειξη: Θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε την Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών αριθμών].

5) Έστω A, B δύο φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Αν για κάθε $a \in A$ υπάρχει $\beta \in B$ με $a < \beta$, να δείξετε ότι $\sup A \leq \sup B$. Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $\sup A < \sup B$;

6) α) Έστω $\rho \in \mathbb{R}$. θεωρούμε το σύνολο $A = \{t \in \mathbb{Q} :\ t < \rho\}$. Να δειχθεί ότι $\sup A = \rho$. [Υπόδειξη: Θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε την πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς.]
β) Έστω $\rho \in \mathbb{R}$. θεωρούμε το σύνολο $B = \{t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} :\ t > \rho\}$. Να δειχθεί ότι $\inf B = \rho$. [Υπόδειξη: Θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσετε την πυκνότητα των αρρήτων στους πραγματικούς αριθμούς.]

7) Έστω $x, y, r \in \mathbb{R}$ με $x + y < r$. Να δειχθεί ότι υπάρχουν δύο ρητοί αριθμοί p, q ώστε $x < p$, $y < q$ και $p + q < r$.

8) Έστω x, y, r τρεις θετικοί πραγματικοί αριθμοί με $xy < r$. Να δειχθεί ότι υπάρχουν δύο ρητοί αριθμοί p, q ώστε $x < p$, $y < q$ και $pq < r$.

9) Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί με $0 < x < y$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $r \in \mathbb{Q}$ με $0 < r < x < y < \frac{1}{r}$.

10) Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί με $0 < x < y$. Να δειχθεί ότι υπάρχουν q ρητός και r άρρητος ώστε $x < q^2 < r^3 < y$.

11) Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\quad 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$.

12) Αν $\sin(\frac{t}{2}) \neq 0$, να δείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ισχύει $\quad \sum\limits_{k=-n}^{n} \cos(kt) = \dfrac{\sin\left((n+\frac{1}{2})t\right)}{\sin(\frac{t}{2})}$.
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε επαγωγή (ξεκινώντας για $n = 0$) και τριγωνομετρικές ταυτότητες.)

13) Έστω A, B δύο μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Θέτουμε $\Gamma = \{x + y :\ x \in A,\ y \in B\}$. Δείξτε ότι:
α) Αν τα A, B είναι άνω φραγμένα, τότε $\sup \Gamma = \sup A + \sup B$.
β) Αν τα A, B είναι κάτω φραγμένα, τότε $\inf \Gamma = \inf A + \inf B$.

14) Έστω A μη κενό υποσύνολα του $\mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε το σύνολο $E = \{\lambda x :\ x \in A\}$. Δείξτε ότι:
α) Αν το A είναι άνω φραγμένο και $\lambda > 0$ τότε $\sup E = \lambda \sup A$.
β) Αν το A είναι κάτω φραγμένο και $\lambda < 0$ τότε $\sup E = \lambda \inf A$.
γ) Αν το A είναι κάτω φραγμένο και $\lambda > 0$ τότε $\inf E = \lambda \inf A$.
δ) Αν το A είναι άνω φραγμένο και $\lambda < 0$ τότε $\inf E = \lambda \sup A$.